Calcolo differenziale e geometria (09/11/2005)

La volta scorsa abbiamo cominciato a parlare di derivate e integrali, ma è meglio ripetere qualcosa. Consideriamo un corpo che si muova con una velocità che varia da un istante all'altro, secondo una legge ***complicata***. Cerchiamo di costruire degli strumenti intellettuali che, almeno in linea di principio, permettano di trattare in modo matematicamente e fisicamente corretto questa ***complicazione***. Partendo da tempo t_0=0, definiamo *s(t)* e *v(t)* rispettivamente la distanza (lo *spazio*, poiché abbiamo usato la lettera *s*) percorsa dal corpo al tempo generico *t* e la velocità da esso posseduta sempre allo stesso tempo *t*.

Torniamo alla definizione di ***velocità***. Essa è per definizione il rapporto tra la distanza (lo spazio) percorso da un corpo in un certo intervallo di tempo, e l'intervallo di tempo stesso. Riprendendo il concetto di ***operatore*** Δ inteso come ***differenza tra due valori*** potremo scrivere la definizione di ***velocità media al tempo t*** come *û(t)*= Δ*s(t)*/ Δ*t*. Ma attenzione: ho usato il simbolo *û* e non *v* per ricordare che questa è la ***velocità media nell'intervallo temporale 0 – t.*** Siccome abbiamo detto che la velocità varia da un istante all'altro, *û(t)* potrebbe non aver nulla a che fare con *v(t)*. È chiara la differenza di concetti fino a questo punto?

Se però sceglieremo intervalli Δ sempre più piccoli, dovrebbe essere intuitivo che, per quanto rapidamente cambi la velocità da un istante all'altro, ci sarà sempre meno differenza tra *û(t)* e *v(t)*. In quest'ordine d'idee, cosa dovrò fare per riuscire finalmente a ottenere una velocità media che sia uguale alla ***velocità istantanea al tempo t***? Semplice. Far tendere a zero Δ*t*, scrivendolo per convenzione δ*t*, laddove abbiamo introdotto un nuovo ***operatore*** d che ha sempre il significato di una differenza, ma infinitesima, tendente a zero. Dunque, la ***velocità istantanea*** di un oggetto si scriverà: *v(t)*= δ*s(t)*/ δ*t* e sarà diversa a ogni istante *t*. Avremo anche: δ*s(t)*=*v(t)* δ*t* che ci servirà tra un momento.

Matematicamente, si dice che la velocità è la ***derivata dello spazio rispetto al tempo***. Misurando la distanza δ*s(t)* percorsa dall'oggetto in un intervallo tempo infinitesimo δ*t* centrato attorno al tempo *t* possiamo perciò definire una quantità ***finita***, e cioè *v(t)*, come rapporto tra due ***infinitesimi***. E se, al contrario, supponiamo di conoscere la legge *v(t)* in base alla quale la velocità varia al passare del tempo, ecco che possiamo calcolare quanto spazio percorre l'oggetto tra l'istante *0* e *t*. Lo spazio sarà la somma di infiniti δ*s(t)* infinitesimi, e lo scriveremo col segno di ***integrale*** (nuovo ***operatore***):

$$s(t) = \int_0^t v(t)dt \tag{1}$$

Si noti che il simbolo di integrale somiglia a una ***S*** allungata proprio perché ha il significato di ***Sommatoria infinita***. Ma guardiamo ancora la formula (1). Perché si dice che l'integrale è l'operazione matematica inversa della derivata? Supponiamo di fare una cosa che un matematico non si permetterebbe mai, ma che noi facciamo solo a titolo di ***modello intuitivo rudimentale*** (in fin dei conti siamo fisici o "fisicofili", no?). Prendiamo l'***operatore*** integrale come se fosse una qualsiasi "quantità" e portiamolo dall'altra parte dell'equazione. Verrebbe fuori un'oscenità del tipo:

$$\frac{s(t)}{\int_0^t} = v(t)dt$$

che, dal punto di vista matematico, non significa nulla. Ma in che modo potremmo dare un senso compiuto a questa schifezza? Semplice: supponendo di scrivere la relazione:

$$d = 1/\int_0^t$$

Infatti, verrebbe fuori $\delta s(t)=v(t)\,\delta t$ che è scrivibile anche $v(t)=\delta s(t)/\delta t$ e questa sappiamo che va bene.

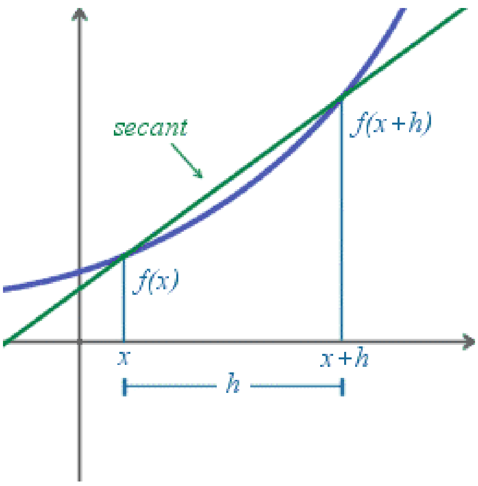
Ragionando in questi termini, Newton introdusse i concetti di ***derivata*** e di ***integrale*** che si applicano ai casi in cui le grandezze fisiche variano col tempo. Per esempio, siccome l'accelerazione ci dice quanto cambia la velocità al variare del tempo, essa è per definizione la derivata rispetto al tempo della velocità (e quindi la ***derivata seconda*** dello spazio rispetto al tempo), e la seconda legge della dinamica si può riscrivere in modo assolutamente generale:

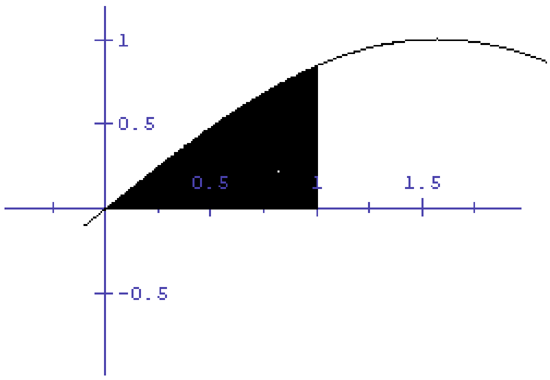
$$\vec{F}(t)=\frac{d}{dt}\left[m(t)\times\vec{v}(t)\right]$$

Ovviamente, non basta ***scrivere*** le equazioni in termini di derivate e integrali; bisogna pure risolverle, per cui bisogna sapere quanto vale la derivata o l'integrale di una certa formula, e pure di questo Newton e Leibnitz si dovettero occupare. Ma per ora soffermiamoci sui motivi per cui lo stesso Newton, una volta risolte le sue equazioni per mezzo del ***calcolo delle flussioni***, scriveva le dimostrazioni non usando il calcolo, ma grazie a teoremi geometrici. Ciò era possibile per due motivi:

- in primo luogo, la geometria forniva un sistema simbolico accettato da chiunque già da 2000 anni, per cui una dimostrazione geometrica era comprensibile a tutti e ***definitiva***:

- in secondo luogo, sia della derivata che dell'integrale è possibile fornire una descrizione geometrica semplice. Vediamo in che modo, generalizzando un po' la notazione. Invece di un tempo t, parliamo di un generico asse delle ascisse x, e al posto della velocità $v(t)$ prendiamo una qualsiasi funzione delle x che scriveremo $f(x)$.





A sinistra c'è la derivata. Prendendo la differenza finita lungo l'asse delle x (in questo caso possiamo scrivere $\Delta x=h$ e $\Delta f(x)=f(x+h)-f(x)$) e unendo i due punti corrispondenti lungo la curva $f(x)$, si ha la retta definita ***secante***. Supponiamo però che i due punti si avvicinino sempre di più; la secante tende a diventare la ***tangente*** alla curva nel punto in cui ne eseguiamo la derivata.

Per quanto riguarda invece l'integrale (a destra), la somma di tanti valori $f(x)\,\delta x$ corrisponde alla somma di tante piccolissime aree, poiché $f(x)$ non è altro che l'altezza della curva rispetto all'ascissa x, mentre δx è la base del rettangolo infinitesimo di altezza $f(x)$.

Dunque, derivate come rette tangenti alla curva nel generico punto x, e integrali come area compresa tra la curva e l'asse delle x, tra i due estremi fra i quali si esegue l'integrale (per esempio, tra 0 e 1 nel caso disegnato sopra).