Infinito e molto oltre (30/11/2005)

Verso la fine della sua vita, Galileo (che ormai era cieco e poteva solo pensare) scrisse in una lettera una sua buffa riflessione sull'infinità dei numeri. Scriviamo su una riga i numeri naturali (1 – 2 – 3...) e su un'altra riga, in corrispondenza, i quadrati di ciascun numero (1 – 4 – 9...). Le due successioni vanno entrambe all'infinito, ma dalla seconda mancano alcuni dei numeri presenti nella prima. Diversi matematici si sono divertiti a ragionare su questo apparente paradosso, ma la vera e propria matematica degli infiniti è appannaggio di Georg Cantor (1845 – 1918) che, a furia di ragionarci sopra, impazzì e, senza neppure conoscere bene la lingua Inglese, cercò per vent'anni di dimostrare che Shakespeare non è mai esistito, e che tutti i suoi lavori sono stati scritti da Francis Bacon (1561 – 1620).

Cantor denominò l'infinità dei numeri naturali col simbolo specifico $\aleph_0$ anziché col più generico ¥ e questa distinzione ha un motivo ben preciso che ora vedremo. Definiamo anzitutto ***potenza*** o ***cardinalità*** di un certo infinito un concetto che potremmo pensare come la ***grandezza*** di quell'infinito se paragonata a quella della serie dei numeri naturali. Riprendiamo Galileo: la ***cardinalità*** della serie dei quadrati dei numeri naturali è chiaramente $\aleph_0$ perché possiamo porre in corrispondenza biunivoca ciascun numero naturale e il suo quadrato per cui, sebbene ogni quadrato tranne quello di **1** sia sistematicamente maggiore del numero naturale corrispondente, è pur vero che a ogni quadrato può essere associato un numero naturale. In altri termini, la ***cardinalità*** di ogni successione infinita di numeri qualsiasi rimane sempre $\aleph_0$ se è possibile individuare un qualche metodo di ***ordinamento*** per cui ogni numero della successione può alla fine essere ***contato*** per mezzo dei numeri naturali.

Ma esistono numeri che non possono essere ***contati*** o ***enumerati*** in questo modo, e che quindi possiedono una ***cardinalità*** maggiore di $\aleph_0$? In prima battuta potrebbero venirci in mente i **numeri razionali**, e cioè le frazioni tra due numeri naturali. Per ogni denominatore (e i denominatori sono $\aleph_0$) ci sono $\aleph_0$ numeratori, e quindi i numeri razionali sembrano essere $\aleph_0^2$. Ma proviamo a mettere in ordine i numeri razionali secondo la tabellina che segue.

Denominatore / Numeratore	1	2	3	4	5	6
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	6/1
2	1/2	2/2	3/2	4/2	5/2	6/2
3	1/3	2/3	3/3	4/3	5/3	6/3
4	1/4	2/4	3/4	4/4	5/4	6/4
5	1/5	2/5	3/5	4/5	5/5	6/5
6	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	6/6

Ora ragioniamo come Cantor (senza impazzire, però): possiamo disegnare sulla tabellina una serie di frecce che congiungono tutti i numeri razionali secondo questa successione:

1/1 -> 2/1 -> 1/2 -> 1/3 -> 2/2 -> 3/1 -> 4/1 -> 3/2 -> 2/3 -> 1/4 -> 1/5 -> 2/4 -> 3/3 -> 4/2 -> 5/1...

E così via all'infinito, procedendo per diagonali che scendono e salgono alternativamente. Con questo sistema, posso associare a ***ogni numero razionale*** un numero naturale, semplicemente scrivendo:

1 -> 2 -> 3 -> 4 -> 5 -> 6 -> 7 -> 8 -> 9 -> 10 -> 11 -> 12 -> 13 -> 14 -> 15...

Dunque, anche la tabella delle frazioni è ***enumerabile*** in base alla successione dei numeri naturali, e perciò ne possiede la stessa ***cardinalità***. Ne consegue che, per quanto possa sembrare strano, $\aleph_0^2 = \aleph_0$.

A questo punto sembra legittimo chiedersi se esistono casi che non possono essere enumerati. Cantor ne individua immediatamente uno nei ***numeri irrazionali***, ovvero quelli che contengono infinite cifre decimali che non si ripetono mai a gruppi, e quindi non possono essere espressi sotto forma di frazione (ricordiamo che le cifre decimali dei numeri razionali, anche se sono infinite, si ripresentano in gruppi sempre uguali, mentre quelle dei numeri irrazionali si presentano in ordine rigorosamente casuale).

Definiamo ***c*** la cardinalità dei numeri irrazionali, e supponiamo che sia $c = \aleph_0$. Questo vuol dire che dovrebbe essere in teoria possibile ordinare tutti i numeri irrazionali in modo tale che a ciascuno di essi sia associabile un numero naturale, in analogia a quanto abbiamo già fatto per i numeri razionali. Cantor dimostra che ciò, invece, non è possibile, sempre introducendo una ***diagonalizzazione*** (si vede che ragionava ***storto***) e passando per la "reductio ad absurdum". Vediamo come.

Supponiamo di poter ***enumerare*** (ovvero associare un numero reale) tutti i numeri irrazionali compresi tra **0** e **1**, non necessariamente in ordine crescente ma secondo una legge qualsiasi che non c'è neanche bisogno di specificare. Cominciamo a scriverli in tabella.

(1) 0,83627509362845077981274589037765422874068952794027610…………
(2) 0,26719004393261414237348459956762445175191003754163904…………
(3) 0,47342561740982759154028458736211930874522181657405754…………
(4) 0.96372104528450116736742089635498132549805654771124089...............

e, se non vi disturba, preferisco non scriverli tutti perché per la dimostrazione bastano questi. Cominciamo a costruire un nuovo numero irrazionale che cominci pure lui con **0,** e seguitiamo a scriverlo nel seguente modo: prendiamo la prima cifra dopo la virgola del primo numero reale. Si tratta di un **8**; gli aggiungiamo **1** e lo portiamo a **9**, e scriviamo **0,9**. Poi, procedendo in diagonale, prendiamo la seconda cifra decimale del secondo numero (**6**) e sommiamo **1**, ottenendo **0,97**. La terza cifra decimale del terzo numero, la quarta del quarto numero, e sommiamo sempre **1**. Siamo a **0,9748**. Andiamo avanti per gli $\aleph_0$ numeri irrazionali e finiamo di scrivere il nostro nuovo numero con $\aleph_0$ cifre dopo la virgola. Ora chiediamoci: questo nuovo numero era già compreso nella lista? La risposta è ***NO!*** Infatti, esso differisce da ogni numero della lista per almeno una cifra. Quella a cui abbiamo sommato **1**. La conclusione è che la lista che supponevamo completa non lo era, poiché abbiamo trovato un numero che non era compreso in essa. E non basta aggiungere questo nuovo numero alla lista, poiché possiamo ripetere il procedimento di ***diagonalizzazione*** e trovare un nuovo numero irrazionale che non c'era ancora, e così via in eterno.

Dunque, Cantor dimostra che ***la cardinalità di "c" è maggiore di quella di*** $\aleph_0$. L'infinità dei numeri irrazionali è infinitamente superiore a quella dei numeri naturali. Abbiamo imboccato la strada che ci porta a un'infinità di infiniti uno maggiore dell'altro, che si ottengono da:

$$\aleph_{N+1} = \aleph_N^{\aleph_N}$$

Si tratta di un risultato importante, poiché permette di ***quantificare*** la teoria degli infiniti. Ma Cantor non era contento. Cominciò a chiedersi se $c = \aleph_1$, oppure se tra $\aleph_0$ e ***c*** potessero esserci altre potenze d'infinito (magari infinite...). Non riuscì a risolvere questo problema, e la ***congettura di Cantor*** ($c = \aleph_1$) passò alla storia come problema formidabile. Ma alla fine

Gödel dimostrò che, se si assumeva come assioma aggiuntivo su cui costruire la matematica la verità della congettura, oppure la sua falsità, tutti i teoremi ricavabili non erano comunque in contraddizione con gli assiomi di partenza. Come dire che Gödel dimostrò che la verità o la falsità della congettura di Cantor non è decidibile a priori e che, comunque, ai fini pratici non ce ne frega niente.

Anche Gödel impazzì, e si lasciò morire di fame per paura che qualcuno volesse avvelenarlo. La vendetta di Cantor!