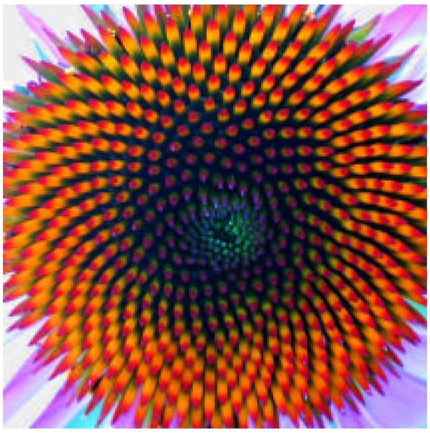
Girasoli e Partenone (19/10/05)

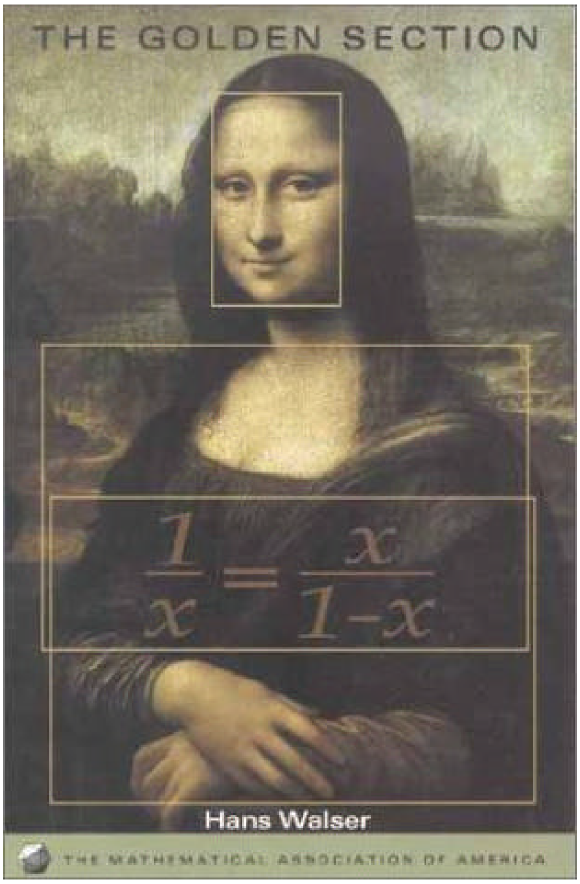
Cosa possono avere di somigliante i girasoli e il Partenone? Una cosa fondamentale. Arriviamoci per gradi. Se mettiamo una coppia di conigli in un luogo appartato, quante coppie di conigli possono essere prodotte dalla coppia iniziale, supponendo che ogni mese ogni coppia produca una nuova coppia in grado a sua volta di riprodursi dal secondo mese? Risposta: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610… La serie, cioè, di ***numeri di Fibonacci*** (Leonardo Bonacci da Pisa, 1170 – 1250, che introdusse in Europa la notazione numerica indiana, che noi chiamiamo “araba”).



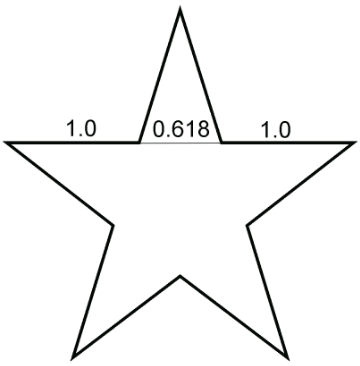
Guardiamo i semi di questo girasole, Si distribuiscono secondo sistemi di spirali che possiamo vedere sia verso destra che verso sinistra. Quelle verso destra sono 34, quelle verso sinistra 55. Ma ci sono girasoli con 144 e 233 sistemi di spirali.

La margherita che vediamo a destra, invece, ha 21 petali. Più in generale, la maggioranza dei fiori ha un numero di petali che è anche un numero di Fibonacci. Come pure i sistemi a spirale di pinoli in una pigna ecc. Ma perché? I numeri di Fibonacci hanno qualche corrispondenza col mondo vegetale e animale? Sì, certo, ma ancora non abbiamo capito il motivo. Ma vediamo un po’ questi numeri sotto il profilo matematico.

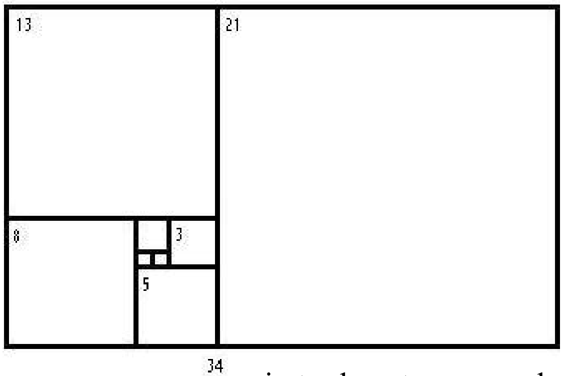
1+1=2; 2+1=3; 3+2=5; 5+3=8; 8+5=13; 13+8=21; 21+13=34; 34+21=55; 55+34=89; 89+55=144… capito?
Adesso facciamo un’altra cosa: 2/1=2; 3/2=1,5; 5/3=1,666…; 8/5=1,6; 13/8=1,625; 21/13=1,615384…; 34/21=1,619047…; 55/34=1,61764…; 89/55=1,618…; 144/89=1,61797…; 610/377=1,618037
Insomma, la serie dei rapporti tra numeri di Fibonacci consecutivi converge verso f =1,61803398874989… che è un numero speciale: la ***SEZIONE AUREA*** che, secondo gli architetti, i pittori, i grafici di ogni tempo e paese, rappresenta il rapporto tra il lato lungo e quello corto del rettangolo in cui va inscritta una figura affinché le sue proporzioni siano “perfette” da punto di vista estetico. Come nel Partenone o in Leonardo.



Potremmo dunque pensare che la sezione aurea ci sembri così armoniosa solo perché la natura la utilizza in modo estensivo, pur se la nasconde sotto i numeri di Fibonacci. Oppure questo modo di pensare comincia già a inquietarci perché l’aspetto ***matematico*** sottostante non è affatto ovvio? Vediamo allora se, prima ancora d’incontrare la matematica, c’è qualche costruzione ***geometrica*** (e quindi più ovviamente ***visiva***) della sezione aurea.



C'è. Per esempio, con una stella a 5 punte. Oppure, prendendo tanti quadrati aventi ciascuno per lato un numero di Fibonacci, e ponendoli uno a fianco dell'altro. Una ***stella marina***, dunque, potrebbe essere un buon aggancio con la sezione aurea, non vi pare? Pur se non è ***esattamente*** una sezione aurea…



Stiamo cominciando a cercare un aggancio tra la natura come la percepiamo noi e la matematica, per capire se la matematica è solo un parto del nostro intelletto, oppure qualcosa che ***esiste*** per conto suo. Con la sezione aurea (che però è un numero un po' ***peculiare***), ci sembra che, tutto sommato, esistano elementi per poter dire che c'è davvero un aggancio di qualche tipo, anche se non sempre immediato, tra questo ***numero irrazionale*** e oggetti reali. Notate bene: avrei potuto iniziare il discorso parlando dei numeri interi positivi (o ***numeri naturali***) e oggetti semplici, come mele, pecore ecc., ma quando s'introduce la matematica a questo modo sembra che ci sia una grossa differenza concettuale tra l'idea che abbiamo di matematica in senso lato e quella di numero naturale. Se invece cominciamo già con un numero irrazionale, ecco che le idee spaziano subito. Ma se finora ci sembra di notare una certa relazione tra natura e matematica, cambiamo subito le carte in tavola.

Scriviamo l'espressione: $j = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$ Il valore di f è proprio la sezione aurea. Oppure:

$$j = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ldots}}}}$$

Pure in questo caso, il valore di x che si ottiene sommando infinite frazioni (questo modo di porre le cose si definisce ***frazione continua***) è la sezione aurea. Non ci pare che le ultime due formule comincino ad allontanarci non di poco da oggetti naturali più o meno familiari, più o meno visibili (chi di noi si è mai messo a contare i sistemi di spirali di un girasole? Al più abbiamo contato i petali di una margherita e abbiamo scoperto che, se sono 21 ci ama, se sono 34 non ci ama. Ma il collegamento tra il fiore e le somme di infinite radici di radici ecc. di 1, oppure tra il fiore e la frazione continua 1+ eccetera, non ci sembra ovvio a nessun livello di intuizione. E allora, cosa possiamo dire della matematica? Che è radicata nella natura, o che è solo un parto della nostra mente?

Ora, prendete una calcolatrice e digitate f con almeno 10 cifre dopo la virgola. Elevatelo al quadrato, e troverete che è uguale a f+1. Strano, vero? Ora, invece, calcolate $1/f$. Il risultato è f-1.

Esercizio per casa. Calcolate quanto vale la serie delle somme e sottrazioni degli inversi dei numeri dispari

$$4\times\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{27}+\frac{1}{29}-\frac{1}{31}+\frac{1}{33}-\frac{1}{35}+\frac{1}{37}-\frac{1}{39}+\frac{1}{41}\ldots\right)$$

andando avanti nel conto finché non siete sicuri di indovinare il risultato (la serie converge un po' lentamente, quindi bisogna seguitare a sommare e sottrarre a lungo). Poi chiedetevi se c'è qualche relazione tra questa serie matematica e la figura geometrica che vi verrà in mente alla fine del calcolo. La prossima volta c'interrogheremo su questo, e su altri strani risultati matematici, sempre nel contesto della domanda: "***La matematica esiste in sé o è un sottoprodotto del nostro pensiero?***"