Pigreco e tensori (26/10/2005)

Come tutti hanno capito, lo sviluppo in serie della volta scorsa convergeva a π. Ma la sua convergenza è lenta; ci sono altri modi di ricavare il suo valore che sono più rapidi. Per esempio:

$$2\times\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\ldots = p \qquad \text{oppure:} \qquad 6\times\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)= p^{2}$$

C'è perfino una formula che permette di calcolare la *k*-esima cifra binaria o esadecimale di π senza dover calcolare tutte le cifre precedenti. Inoltre, la probabilità che due interi scelti a caso siano primi fra loro è di $6/\pi^2$, e Il numero medio di modi in cui è possibile scrivere un intero positivo come somma di due quadrati perfetti è π/4. Quindi, π ha a che vedere coi quadrati, coi numeri primi…

Ma, seguitando con questi ragionamenti, restiamo nel campo della filosofia. Qualche volta ce lo possiamo permettere, ma per non più di un salotto o due; poi dobbiamo tornare alla fisica e, stavolta, passando per la matematica. Riprendiamo le fila del discorso.

La matematica può essere pensata come l'unione di due ***oggetti*** (in senso molto lato) diversi: il primo ***oggetto*** sono i concetti matematici stessi come la somma, il prodotto, la radice, la derivata e così via; il secondo ***oggetto*** è la ***simbologia*** con cui, via via che ci arrivavano, i matematici hanno deciso di esprimere i concetti stessi e le loro relazioni. In questo senso, il segno " + " denota l'addizione eccetera. È chiaro che, se la matematica contiene qualcosa di ***universale***, si tratta dei concetti. La simbologia, di solito, è stata adottata per ragioni storiche ed è del tutto contingente; sta di fatto che è quella che tende a spaventare di più il profano. Questo è comprensibile in quanto i concetti matematici sono l'equivalente dei concetti mentali in generale (una sedia è una sedia per qualunque essere umano) e, come questi ultimi, sono ***relativamente facili*** da capire, mentre la simbologia è l'equivalente della ***lingua*** e dell'***alfabeto*** e, sebbene il concetto di sedia sia comune a tutti, il modo di scrivere "sedia" in diverse lingue e alfabeti può rendere il vocabolo assolutamente irriconoscibile.

Perché insistere su un argomento così ovvio? Il motivo c'è: voglio evidenziare la ***semplicità*** dei concetti fondamentali della matematica, pure quando sono espressi con una simbologia che appare formidabile. Il problema nell'accostarsi alla matematica, infatti, è molto più nell'apprendimento della simbologia e del suo uso corretto, che nella comprensione dei concetti sottostanti. Voglio fare un esempio, per cercare di convincere qualcuno. Prenderò qualcosa di tremendo solo a pronunciarlo: il cosiddetto ***tensore metrico fondamentale*** che compare nel calcolo della curvatura dello spaziotempo nella Relatività Generale. In genere si scrive "g_{ij}" ed equivale a una tabellina 4×4.

Partiamo dal Teorema di Pitagora. In un triangolo rettangolo, il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti. Fin qui ci dovremmo essere. Supponiamo che ***AB*** sia l'ipotenusa, e che i due cateti siano ***BC*** e ***CA***, il primo orientato secondo l'asse delle ***x*** e il secondo lungo le ***y***. Scriviamo la formula del teorema: $AB^2 = BC^2 + CA^2$. Tutto qui. Adesso, però, supponiamo di aver disegnato il triangolo su un foglio di carta elastico, e di applicare a questo foglio una trazione e una torsione qualsiasi, in modo che il triangolo sia completamente deformato, allungato da qualche parte, accorciato da qualche altra, incurvato nel modo più infame possibile, pur restando in piano. Potremo scrivere lo stesso il Teorema di Pitagora per una figura così contorta? La risposta è affermativa, ma è ovvio che dovremo aggiungere qualcosa alla formula. Allora, ripensiamola un attimo in questo modo: nella geometria euclidea noi scriviamo: $AB^2 = 1 \times BC^2 + 1 \times CA^2$ e ovviamente nemmeno ci viene in mente il coefficiente ***1***. Ma se deformiamo il triangolo come appena detto, ecco che potremmo lo stesso calcolare AB^2 purché, nel fare i conti, teniamo in considerazione di quanto abbiamo ***storto*** i lati, punto per punto. Dunque, nella parte che si riferisce al primo cateto, dovremo aggiungere un coefficiente a_{xx} diverso da 1 per tenere conto di quanto abbiamo ***allungato*** l'asse delle ***x***, e un coefficiente a_{xy} che invece tiene conto di quanto lo abbiamo ***ruotato*** verso l'asse ***y***. Per il secondo cateto, analogamente, dovremo considerare un coefficiente a_{yy} che ci dice di quanto l'abbiamo allungato, e un coefficiente a_{yx} per valutare di quanto l'abbiamo storto verso l'asse ***x***. In totale, il Teorema di Pitagora diventerà:

$$AB^2 = a_{xx} \times BC^2 + a_{xy} \times BC^2 + a_{yx} \times CA^2 + a_{yy} \times CA^2.$$

O, per meglio dire, se le deformazioni del foglio sono diverse da un punto all'altro, dovremo sommare tanti triangolino piccolissimi ciascuno con la sua quaterna di valori $\boldsymbol{a_{ij}}$. Ma, per quanto la formula sembri complicata, non abbiamo difficoltà a capire che quei quattro nuovi coefficienti che abbiamo dovuto introdurre sono dovuti allo ***storcimento*** del foglio, e che il valore di ciascuno di essi è determinato, punto per punto, da quanto abbiamo tirato e ruotato il foglio in quella zona. Il ***significato*** dei coefficienti non dovrebbe essere difficile da intuire, anche se magari ci sembra complicato riuscire a calcolarli in base a come abbiamo torturato il foglio. Come pure, dovrebbe esser facile capire il concetto se applicato a rovescio, ovvero il fatto che, se qualcuno ci desse i valori di quei coefficienti in un certo punto, in teoria sarebbe possibile ricostruire la curvatura del foglio in quella zona.

Adesso, definiamo ***tensore metrico fondamentale*** del foglio di carta la tabellina $\boldsymbol{g_{ij}}$ che si scrive:

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{vmatrix}$$

Si tratta soltanto di un modo più abbreviato di scrivere i quattro coefficienti $\boldsymbol{a_{ij}}$ fermo restando che, se nella formula matematica potremo scrivere $\boldsymbol{g_{ij}}$ per far capire che lì ci sono quei coefficienti, quando poi vorremo eseguire il calcolo numerico dovremo sostituire volta per volta il valore di $\boldsymbol{a_{ij}}$ appropriato.

Poi, se passiamo a 3 dimensioni, la tabellina non avrà più soltanto 2×2=4 coefficienti, ma ne avrà 3×3=9 e, considerando pure il tempo come quarta dimensione, ne avrà 4×4=16.

Insomma, questo famigerato tensore non rappresenta nient'altro che una tabellina in cui sono riportati i valori dei coefficienti per cui bisogna moltiplicare gli spostamenti lungo gli assi coordinati per calcolare la distanza tra due punti qualsiasi dello spaziotempo.

Ora, smettiamo di stiracchiare il foglio di carta e lasciamo che, per elasticità, torni alla sua forma iniziale: quella su cui si riconosce un bel triangolo rettangolo. Quanto vale il ***tensore metrico fondamentale*** sul normale piano euclideo?

$$g_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Era così difficile? È vero che ho semplificato in modo tale che un matematico si strapperebbe i capelli (se ne ha), ma il concetto di base è quello. Ogni curvatura spaziale o spaziotemporale può essere descritta in modo quantitativo, punto per punto, da un tensore metrico fondamentale che ci dice quanto è storto, deformato, tirato, ***curvato*** in generale quel pezzetto di spazio. Il simbolo $\boldsymbol{g_{ij}}$ nell'equazione può intimidire, ma il suo significato matematico non ha nulla di diabolico. Dunque, d'ora in poi, attenzione ad aver paura della matematica: è un problema di ***alfabeto***, non di ***significato***.