

Gli infiniti infinitesimi (02/11/2005)

La matematica precede la fisica o viceversa? Quel che succede in realtà è che a volte i fisici si trovano per le mani strumenti matematici già pronti per l'uso (e vedremo più avanti alcuni casi di questo tipo), altre volte hanno bisogno di sviluppare in proprio nuovi metodi di calcolo. È quel che avvenne a Newton tra il 1668 e il 1670 col suo *calcolo delle flussioni*, pure se si guardò bene dal pubblicare i propri risultati fino al 1704, quando la polemica con Leibnitz per il primato della scoperta era al culmine. Infatti, già prima del 1690 Leibnitz aveva risolto per proprio conto, in modo matematicamente rigoroso, e quindi formalmente molto più corretto, sintetico e comprensibile rispetto a Newton, il problema del *calcolo differenziale*. I due finirono per litigare ferocemente. Leibnitz: «Io l'avevo scritto prima!» Newton: «Sì, ma io l'avevo pensato prima ancora!» Nel 1714 Leibnitz morì e Newton continuò implacabilmente a dichiarare la propria priorità e il plagio di Leibnitz, cosicché il metodo di Newton fu adottato solo in Inghilterra. Questo fu forse l'inizio di un percorso che doveva condurre al declino della matematica britannica nei confronti di quella tedesca e, alla fine dell'800, addirittura al declino della fisica britannica. Ma le questioni di primato intellettuale non c'interessano; cerchiamo di capire quali strumenti di calcolo furono sviluppati e perché. Userò l'esempio *fisico* di Newton secondo i criteri *matematici* di Leibnitz.

Scriviamo la seconda legge della dinamica $\vec{F} = m \times \vec{a}$ dove F è la forza che spinge un oggetto di massa m , e a è l'accelerazione conseguente all'applicazione della forza; la freccetta ricorda che si tratta di quantità *vettoriali*. Supponiamo che l'oggetto, al tempo $t_0=0$ in cui cominciamo ad applicare la forza, sia fermo. Vogliamo sapere quale sarà la velocità dell'oggetto al tempo $t_1=1$ secondo, supponendo altresì che la forza sia rimasta costante per tutto il tempo t_1-t_0 . Siccome l'accelerazione misura *quanto varia la velocità durante il tempo*,

$$\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = a \quad (1)$$

sarà facile ricavare la velocità finale: $v_1=a$, che è il caso particolare di (1) nel momento in cui $v_0=0$ e $t_1-t_0=1$. E quanto spazio ha percorso l'oggetto dall'inizio dell'esperimento? Anche qui basta un ragionamento facile: lo spazio è dato dal prodotto della velocità per il tempo; siccome il corpo era inizialmente fermo e ha accelerato in modo uniforme, la sua velocità *media* sarà stata $1/2 v_1$, e di conseguenza lo spazio si calcolerà come: $s=1/2 v_1=1/2 a$.

Ma abbiamo semplificato un po' troppo. Riscriviamo la formula (1) in quest'altro modo:

$$(v_1 - v_0) = a \times (t_1 - t_0)$$

e la formula che fornisce lo spazio percorso in funzione della velocità come: $s=v \times (t_1 - t_0)$ dove stavolta v è la velocità *media* che, nel nostro caso, abbiamo visto essere $1/2 v_1$. Sostituendo di nuovo, avremo: $s=1/2 a \times (t_1 - t_0)^2$, che ci sembra un po' diversa semplicemente perché, prima, avevamo ommesso la differenza di tempi che era uguale a 1 secondo. In effetti, già Galileo aveva trovato che, in generale, lo spazio percorso da una sferetta su un piano inclinato, soggetta alla forza costante della gravità terrestre, va col quadrato dei tempi di percorrenza.

Il problema che si poneva Newton, però, era ancora più generale. Partiamo dal caso semplice, quello che si può scrivere $s=v \times \Delta t$ dove il simbolo Δ è un "*operatore*": sta a indicare una generica differenza tra due quantità dello stesso genere. In questo caso, una differenza tra il tempo finale e quello iniziale. Ebbene: abbiamo visto che nel caso in cui la velocità sia costante, oppure cresca linearmente col tempo a partire da zero, non abbiamo difficoltà a calcolare lo spazio percorso durante un certo Δt . Ma cosa succede se la velocità non è costante e neppure cresce linearmente col tempo, magari perché la forza non è costante al passare del tempo? Sarebbe come se Galileo avesse costruito un piano inclinato che parte con una certa inclinazione, poi curva un po' e quasi si raddrizza, quindi ridiscende ancora più ripido, fa un arco di cerchio e procede per un pezzetto verso l'alto (con la forza che, dunque, cambia addirittura segno), dopodiché si appiattisce di nuovo e riprende a scendere, ma non rettilineo bensì seguendo un arco di parabola... Dite che Galileo non avrebbe mai fatto qualcosa di così indecente? Non è vero. Faceva questo e peggio, e così pure Newton. Ma torniamo al problema: come si fa a calcolare una relazione tra

velocità e tempo, e una tra spazio percorso e tempo, se la forza (e quindi l'accelerazione) variano in modo così irregolare?

Newton procedette per gradi. Immaginò anzitutto che la velocità fosse costante per intervalli di tempo Δt di breve lunghezza. Durante uno di questi intervalli di tempo, lo spazio percorso possiamo scriverlo $\Delta s = v(t) \times \Delta t$ dove abbiamo scritto $v(t)$ e non semplicemente v per ricordarci che la velocità varia al passare del tempo e, dunque, ha un valore diverso a ogni tempo t . Ma possiamo invertire questa formula per **definire la velocità** come $v(t) = \Delta s / \Delta t$. A che serve? Ora vedremo. Serve nel caso in cui la velocità **non sia mai costante** ma in continua modifica, seguendo una forza e un'accelerazione (e, peggio che peggio, una massa) variabile nel tempo in modo irregolare. Cosa si può fare in una circostanza del genere? Far tendere a zero Δt , scrivendolo per convenzione δt , laddove abbiamo introdotto un nuovo **operatore** δ che ha sempre il significato di una differenza, ma infinitesima, tendente a zero. Dunque, la **velocità istantanea** di un oggetto si scriverà: $v(t) = \delta s / \delta t$ e, come abbiamo appena detto (ma è meglio ripetere) è funzione del tempo poichè sarà diversa a ogni istante t . Matematicamente, si dice che la velocità è la **derivata dello spazio rispetto al tempo**. Misurando la distanza δs percorsa dall'oggetto in un intervallo tempo δt centrato attorno al tempo t possiamo perciò definire una quantità **finita**, e cioè $v(t)$, come rapporto tra due **infinitesimi**. E se, al contrario, supponiamo di conoscere la legge $v(t)$ in base alla quale la velocità varia al passare del tempo, ecco che possiamo calcolare quanto spazio percorre l'oggetto tra l'istante t_1 e t_2 . Lo spazio sarà la somma di infiniti δs infinitesimi, e lo scriveremo col segno di **integrale** (nuovo **operatore**):

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) \times dt \quad (2)$$

Si noti che il simbolo di integrale somiglia a una **S** allungata proprio perché ha il significato di **Sommatoria infinita**.

Guardiamo ancora la formula (2). Perché si dice che l'integrale è l'operazione matematica inversa della derivata? Supponiamo di fare una cosa che un matematico non si permetterebbe mai, ma che noi facciamo solo a titolo di **modello intuitivo rudimentale** (in fin dei conti siamo fisici o "fisicofili", no?). Prendiamo l'**operatore** integrale come se fosse una qualsiasi "quantità" e portiamolo dall'altra parte dell'equazione. Verrebbe fuori un'oscenità del tipo:

$$\frac{s}{\int_{t_1}^{t_2}} = v(t) \times dt$$

che, dal punto di vista matematico, non significa nulla. Ma in che modo potremmo dare un senso compiuto a questa schifezza? Semplice: supponendo di scrivere la relazione:

$$d = \frac{1}{\int_{t_1}^{t_2}}$$

Infatti, verrebbe fuori $\delta s = v(t) \times \delta t$ che è scrivibile anche $v(t) = \delta s / \delta t$ e questa sappiamo che va bene.

Ragionando in questi termini, Newton introdusse i concetti di **derivata** e di **integrale** che si applicano ai casi in cui le grandezze fisiche variano col tempo. Per esempio, siccome l'accelerazione non è altro che la derivata rispetto al tempo della velocità (e quindi la **derivata seconda** dello spazio rispetto al tempo), la seconda legge della dinamica si può riscrivere in modo assolutamente generale:

$$\vec{F}(t) = \frac{d}{dt} [m(t) \times \vec{v}(t)]$$

Ovviamente, non basta **scrivere** le equazioni in termini di derivate e integrali; bisogna pure risolverle, per cui bisogna sapere quanto vale la derivata o l'integrale di una certa formula, e pure di questo Newton si dovette occupare. La prossima volta vedremo qualcosa di più sul **significato intuitivo** di derivate e integrali, e su come si calcolano in casi semplici.